

PII: S0017-9310(96)00114-7

Convection naturelle instationnaire dans un cylindre rempli de grains ouvert à ses extrémités et dont la paroi est chauffée par un flux de chaleur constant : validité de l'hypothèse de l'équilibre thermique local

S. BEN NASRALLAH, T. AMARA et M. A. DU PEUTY

Ecole Nationale d'Ingenieurs, Route de Kairouan, 5019 Monastir, Tunisie, Laboratoire d'Etudes Thermiques, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, Site du Futuroscope, 86960 Futuroscope Cédex, France

(Reçu 5 décembre 1994 et sous forme finale 4 mars 1996)

Résumé—Nous nous proposons d'étudier théoriquement l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle instationnaire dans un cylindre rempli de grains, ouvert à ses extrémités et dont la paroi est chauffée par une densité de flux de chaleur constante. Deux types de modèles sont utilisés : un modèle à deux températures et un modèle à une température. Les deux modèles sont résolus numériquement par la méthode des volumes finis en tenant compte des effets bidimensionnels. Des résultats concernant l'évolution spatio-temporelle de la température et de la pression sont présentés et analysés. En vue de tester la validité du modèle à une température et par conséquent celle de l'hypothèse de l'équilibre thermique local, deux types de comparaisons sont effectuées : des comparaisons entre les valeurs locales des températures du solide et du fluide obtenues à l'aide du modèle à deux températures ; et des comparaisons entre les valeurs obtenues à l'aide des deux modèles du débit volumique et du flux de chaleur convecté quittant la face supérieure du cylindre. Copyright © 1996 Elsevier Science Ltd.

1. INTRODUCTION

L'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle en milieu poreux intéressent un large champ d'applications (réacteurs chimiques, échangeurs, silos de grains, stockage de l'énergie, géothermie, pétrole etc.). Ainsi, depuis plusieurs décennies, ces phénomènes attirent l'attention des auteurs et ont fait l'objet de nombreux travaux.

Parmi ces travaux, il y a ceux qui se rapportent à l'étude de la stabilité. Nous en trouvons des revues exhaustives dans les publications de Nield [1], de Cheng [2], Combarous et de Bories [3] et de Bories [4].

Les problèmes de sources thermiques noyées dans un milieu poreux ont fait également l'objet de nombreuses études [5–9]. L'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle sur une plaque plane se trouvant dans un milieu poreux ont été étudiés par plusieurs auteurs [10–13]. Un grand nombre de travaux a été consacré à l'étude de la convection naturelle en milieux poreux confinés. Parmi ces travaux, nous citons ceux de Bejan et Khair [14], de Weber [15] de Mazouka *et al.* [16], de Beukema et Brun [17], de Ineba et Seki [18], de Lauriat et Prasad [19], de Chang et Hsiao [20] et de Combarous et Bories [21].

Les travaux relatifs à la convection naturelle en milieux poreux semi-confinés sont plus rares. Parmi

ces travaux nous citons celui de Bejan [22] qui a étudié le cas du cylindre vertical ouvert à son extrémité supérieure sur un milieu poreux semi-infini et ayant une température pariétale supérieure à celle de l'environnement, celui de Young *et al.* [23] qui ont étudié le cas d'une cavité ouverte à son extrémité supérieure et présentant dans sa partie centrale une source linéique de chaleur, celui de Nishimura *et al.* [24] qui ont étudié l'écoulement et le transfert de chaleur dans une cavité partiellement remplie d'un milieu poreux et dont les parois latérales sont portées à des températures différentes.

Il ressort de l'étude bibliographique que :

- Tous les travaux sur la convection naturelle, sauf celui de Combarous et Bories [21], utilisent un modèle à une température et par conséquent admettent la validité de l'hypothèse de l'équilibre thermique local.
- La convection naturelle instationnaire en milieux poreux se trouvant dans un cylindre vertical ouvert à ses deux extrémités n'a jamais, à notre connaissance, été étudiée.

Notre contribution consiste, donc, à étudier la convection naturelle instationnaire dans un cylindre rempli d'un milieu poreux, ouvert à ses deux extrémités et dont la paroi est chauffée par une densité de

NOMENCLATURE

A	facteur de forme ; $A = R/H$	t	temps
Bi	nombre de Biot représentant l'échange interne	T	température
Bi_0	nombre de Biot représentant l'échange entre la face supérieure du cylindre et l'ambiance	T_0	température ambiante
D	débit volumique	U	composante de la vitesse suivant z
g	accélération de la pesanteur	V	composante de la vitesse suivant r .
H	hauteur du cylindre	Lettres grecques	
h	coefficient de transfert de chaleur à la face supérieure du cylindre	α	diffusivité thermique du milieu : $\alpha = \lambda^*/(\rho c_p)$
H_{fs}	coefficient de transfert de chaleur entre le fluide et le solide	β	coefficient de dilatation thermique du fluide
k	perméabilité	ε	porosité
P	pression motrice	λ^*	conductivité thermique équivalente du milieu poreux
P_0	pression motrice ambiante	λ_f^*	conductivité thermique effective du fluide
Pr	nombre de Prandtl	λ_s^*	conductivité thermique effective du solide
Q	flux d'énergie convecté	μ_f	viscosité dynamique du fluide
r, z	coordonnées de l'espace	ν_f	viscosité cinématique du fluide
R	rayon du cylindre	(ρc_p)	capacité calorifique du milieu poreux
Ra	nombre de Rayleigh	$(\rho c_p)_f$	capacité calorifique du fluide
Re	nombre de Reynolds	$(\rho c_p)_s$	capacité calorifique du solide.
S	surface d'échange solide-fluide		

flux de chaleur constante (Fig. 1). Deux modèles sont utilisés : un modèle à deux températures qui distingue dans un volume élémentaire du milieu les températures de la phase fluide et de la phase solide, les échanges de chaleur étant explicités à l'aide d'un coefficient d'échange ; et un modèle à une température qui suppose que le milieu poreux se comporte thermiquement comme un milieu continu fictif unique. La comparaison entre les résultats obtenus à l'aide des deux modèles nous permet de déterminer le domaine de validité de l'hypothèse de l'équilibre thermique local.

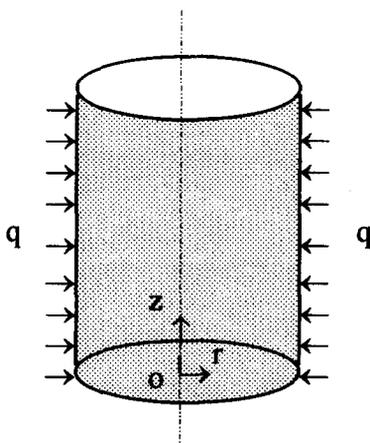


Fig. 1. Configuration géométrique.

2. FORMULATION

Nous nous intéressons à l'écoulement et au transfert de chaleur dans un milieu poreux constitué de deux phases : une phase fluide pure et une phase solide indéformable. Afin de passer à un milieu continu fictif, la formulation des phénomènes est effectuée à une échelle macroscopique (taille du volume élémentaire représentatif très grande par rapport à celle des pores). Les hypothèses utilisées sont :

- les termes de dispersion et de tortuosité peuvent être modélisés comme étant des flux diffusifs ;
- la loi de Darcy est valable ;
- les phases fluide et solide sont inertes ;
- les dissipations visqueuses et le travail de compression sont négligeables ;
- la masse volumique du fluide est considérée constante, sauf lorsque ses variations causent directement des forces de poussées d'Archimède, on peut alors, écrire :

$$\rho_f = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) ;$$

- toutes les autres caractéristiques physiques sont constantes.

En coordonnées cylindriques et compte tenu de la symétrie par rapport à l'axe oz et des hypothèses citées, les équations régissant à l'échelle macroscopique l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle dans le cylindre sont :

l'équation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = \rho_0 g \beta \frac{\partial T_f}{\partial z} \quad (1)$$

la loi de Darcy :

$$U = -\frac{k}{\mu_f} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_0 g \beta (T_f - T_0) \right), \quad V = -\frac{k}{\mu_f} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (2)$$

l'équation de conservation de l'énergie du fluide :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho c_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} &= \varepsilon \lambda_f^* \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right) \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\rho c_p)_f V T_f) \\ &- \frac{\partial}{\partial z} ((\rho c_p)_f U T_f) - H_{fs} (T_f - T_s) S \end{aligned} \quad (3)$$

l'équation de conservation de l'énergie du solide :

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)(\rho c_p)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} &= (1-\varepsilon) \lambda_s^* \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right) \\ &+ H_{fs} (T_f - T_s) S. \end{aligned} \quad (4)$$

Le problème se trouve décrit par trois équations aux dérivées partielles couplées. Le couplage des équations apparaît à trois niveaux puisque le terme source de l'équation de pression est directement fonction du champ de température du fluide qui est lui-même fonction de la pression par l'intermédiaire de la vitesse ; et les champs de température du fluide et du solide sont couplés par le terme d'échange.

Dans l'écriture des termes de conduction, nous avons supposé que les tenseurs de conductivité thermique équivalente sont sphériques. Les scalaires λ_f^* et λ_s^* sont bien sur différents des coefficients de conductivité thermique propres λ_f et λ_s des constituants du milieu, mais dépendent également, entre autres paramètres :

- pour λ_f^* , de la dispersion hydrodynamique et de la tortuosité ;
- pour λ_s^* de l'état de division de la phase solide.

Lorsque $T_f = T_s$ (hypothèse de l'équilibre thermique local valable) une seule équation d'énergie suffit pour déterminer le champ thermique. Cette équation qui est obtenue, afin d'éliminer les termes d'échange entre les phases, en sommant les deux équations de conservation de l'énergie, s'écrit :

$$\begin{aligned} (\rho c_p) \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda^* \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\rho c_p)_f V T) - \frac{\partial}{\partial z} ((\rho c_p)_f U T) \end{aligned} \quad (5)$$

avec :

$$(\rho c_p) = \varepsilon(\rho c_p)_f + (1-\varepsilon)(\rho c_p)_s$$

$$\lambda^* = p \varepsilon \lambda_f^* + (1-\varepsilon) \lambda_s^*$$

Le modèle à deux températures est constitué des équations (1)–(4) et le modèle à une température et constitué des équations (1), (2) et (5).

Conditions initiales et aux limites hydrodynamiques

Les conditions initiales et aux limites hydrodynamiques sont identiques pour les deux modèles :

- la pression motrice à l'intérieur du cylindre est initialement supposée constante

$$P(0, r, z) = P_0 ;$$

- en raison de la symétrie de révolution autour de l'axe (oz) et de l'imperméabilité de la paroi ($r = R$), on a

$$\frac{\partial P}{\partial r}(t, 0, z) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r}(t, R, z) = 0 ;$$

- Les conditions hydrodynamiques en haut et en bas du cylindre sont :

$$P(t, r, 0) = P_0 - \frac{1}{2} \rho_0 U^2, \quad P(t, r, H) = P_0.$$

U est la vitesse à l'entrée du cylindre. Ayant affaire dans notre cas à un écoulement ou les vitesses resteront très faibles, nous négligeons l'effet du terme $-\frac{1}{2} \rho_0 U^2$. D'où on aura :

$$P(t, r, 0) = P_0.$$

Conditions initiales et aux limites thermiques dans le cas du modèle à deux températures

Initialement, on suppose que la température du fluide et celle du solide sont constantes et égales à la température ambiante :

$$T_f(0, r, z) = T_s(0, r, z) = T_0.$$

A l'entrée, nous supposons que la température du fluide est égale à la température ambiante :

$$T_f(t, r, 0) = T_0.$$

Pour la température du solide nous utilisons la condition suivante :

$$-\lambda_s^* \frac{\partial T_s}{\partial z}(t, r, 0) = H_{fs} (T_s(t, r, 0) - T_0).$$

La symétrie de révolution autour de l'axe (oz) se traduit par :

$$\frac{\partial T_f}{\partial r}(t, 0, z) = \frac{\partial T_s}{\partial r}(t, 0, z) = 0.$$

La paroi latérale $r = R$ est chauffée par une densité de flux de chaleur q constante, ceci se traduit par :

$$\lambda_f^* \frac{\partial T_f}{\partial r}(t, R, z) = q, \quad \lambda_s^* \frac{\partial T_s}{\partial r}(t, R, z) = q.$$

Sur la face supérieure ($z = H$) du cylindre, les échanges sont mal connus et l'écoulement existant au-dessus de la surface poreuse est très complexe. D'une

part la face supérieure déclenche un écoulement de convection naturelle analogue à celui observé sur une plaque horizontale chauffée. D'autre part le flux de fluide sortant perturbe l'effet de la plaque chaude et peut faire appel d'air dans certaines conditions sous forme de recirculation. Pour résoudre ce problème rigoureusement, il faut élargir le domaine de calcul pour tenir compte de l'écoulement et du transfert de chaleur dans le fluide au voisinage de la surface supérieure, ce qui complique énormément l'étude. Afin de contourner ce problème, nous introduisons dans le cas d'un écoulement ascendant un coefficient d'échange de chaleur h :

$$\lambda_s^* \frac{\partial T_s}{\partial z}(t, r, H) = -h(T_s - T_0)$$

$$\lambda_f^* \frac{\partial T_f}{\partial z}(t, r, H) = -h(T_f - T_0).$$

Dans le cas d'un écoulement descendant, nous utilisons les conditions aux limites suivantes :

$$T_f(t, r, H) = T_0 ;$$

$$-\lambda_s^* \frac{\partial T_s}{\partial z}(t, r, H) = H_{fs}(T_s(t, r, H) - T_0).$$

Conditions initiales et aux limites thermiques dans le cas du modèle à une température

Initialement, on suppose que la température du milieu est constante et égale à la température ambiante :

$$T(0, r, z) = T_0.$$

A l'entrée du cylindre, nous supposons que la température est égale à la température ambiante :

$$T(t, r, 0) = T_0.$$

Sur l'axe du cylindre :

$$\frac{\partial T}{\partial r}(t, 0, z) = 0.$$

Sur la paroi chauffée :

$$-\lambda^* \frac{\partial T}{\partial r}(t, R, z) = q.$$

A la sortie :

Dans le cas d'un écoulement ascendant ($U > 0$)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, r, H) = -h(T(t, r, H) - T_0) ;$$

Dans le cas d'un écoulement descendant

$$T(t, r, 0) = T_0.$$

Adimensionnalisation

Les équations sont mise sous forme adimensionnelle afin de conférer une certaine généralité aux résultats. On introduit à cet effet les grandeurs de référence suivantes :

$$L_{ref} = H, T_{ref} = \frac{qH}{\lambda^*}, P_{ref} = \frac{\lambda^* \mu_f}{(\rho c_p)_f k},$$

$$U_{ref} = \frac{k P_{ref}}{\mu_f H}, t_{ref} = \frac{H}{U_{ref}}.$$

Les variables adimensionnelles sont :

$$z^+ = \frac{z}{H}, r^+ = \frac{r}{H}, T_f^+ = \frac{(T_f - T_0)}{T_{ref}},$$

$$T_s^+ = \frac{(T_s - T_0)}{T_{ref}}, T^+ = \frac{(T - T_0)}{T_{ref}}, P^+ = \frac{(P - P_0)}{P_{ref}},$$

$$U^+ = \frac{U}{U_{ref}}, V^+ = \frac{V}{U_{ref}}, t^+ = \frac{t}{t_0}.$$

Les équations écrites sous forme adimensionnelle font intervenir plusieurs nombres sans dimension. Ces nombres sont :

le nombre de Raleigh

$$Ra = \frac{kg\beta qH^2}{\alpha\nu\lambda^*}$$

le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho_f U_0 H}{\mu}$$

le nombre de Biot relatif aux échanges de chaleur externes

$$Bi_0 = \frac{hH}{\lambda^*}$$

le nombre de Biot relatif aux échanges de chaleur internes

$$Bi = \frac{H_{fs}H^2 S}{\lambda^*}$$

le nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu c_{Pr}}{\lambda^*}$$

le rapport des conductivités thermiques

$$\frac{\lambda_f^*}{\lambda_s^*}$$

le rapport des capacités calorifiques

$$\frac{\rho c_{Pr}}{\rho c_p}$$

le facteur de forme

$$A = \frac{R}{H}$$

les équations (1)–(5) deviennent donc :

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial P^+}{\partial r^+} \right) + \frac{\partial^2 P^+}{\partial z^{+2}} = Ra \frac{\partial T_f^+}{\partial z^+},$$

$$U^+ = -\frac{\partial P^+}{\partial z^+} + RaT_f^+, \quad V^+ = -\frac{\partial P^+}{\partial r^+}$$

$$\varepsilon \frac{\partial T_f^+}{\partial t^+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+}(r^+ V^+ T_f^+) + \frac{\partial}{\partial z^+}(U^+ T_f^+) = \frac{1}{PrRe} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + (1-\varepsilon)\lambda_s^*/\lambda_f^*)} \left(\frac{\partial^2 T_f^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial T_f^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 T_f^+}{\partial z^{+2}} \right) - \frac{Bi}{PrRe} (T_f^+ - T_s^+)$$

$$(1-\varepsilon) \frac{\partial T_s^+}{\partial t^+} = \frac{1}{PrRe} \frac{(1-\varepsilon)}{((1-\varepsilon) + \varepsilon\lambda_f^*/\lambda_s^*)} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_s} \left(\frac{\partial^2 T_s^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial T_s^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 T_s^+}{\partial z^{+2}} \right) + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_s} \frac{Bi}{PrRe} (T_f^+ - T_s^+)$$

Lorsqu'il y a équilibre thermique local le champ thermique est déterminé à partir de l'équation suivante (5) :

$$\frac{\rho c_p}{(\rho c_p)_f} \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+}(r^+ V^+ T^+) + \frac{\partial}{\partial z^+}(U^+ T^+) = \frac{1}{PrRe} \left(\frac{\partial^2 T^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial T^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^{+2}} \right)$$

Les conditions initiales et aux limites hydrodynamiques deviennent

$$P^+(0, r^+, z^+) = 0;$$

$$P^+(t^+, r^+, 0) = P^+(t^+, r^+, 1) = 0$$

$$\frac{\partial P^+}{\partial r^+}(t^+, 0, z^+) = \frac{\partial P^+}{\partial r^+}(t^+, A, z^+) = 0.$$

Les conditions initiales et aux limites thermiques dans le cas du modèle à 2 températures deviennent

$$T_f^+(0, r^+, z^+) = T_s^+(0, r^+, z^+) = 0$$

$$T_f^+(t^+, r^+, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial T_s^+}{\partial z^+}(t^+, r^+, 0) = -\frac{Bi\lambda^*}{HS^2\lambda_s^*} T_s^+(t^+, r^+, 0)$$

$$\frac{\partial T_f^+}{\partial r^+}(t^+, 0, z^+) = \frac{\partial T_s^+}{\partial r^+}(t^+, 0, z^+) = 0$$

$$\frac{\partial T_f^+}{\partial z^+}(t^+, A, z^+) = -\varepsilon \left(1 + \frac{(1-\varepsilon)\lambda_s^*}{\varepsilon\lambda_f^*} \right)$$

$$\frac{\partial T_s^+}{\partial z^+}(t^+, A, z^+) = -(1-\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon\lambda_f^*}{(1-\varepsilon)\lambda_s^*} \right).$$

Dans le cas d'un écoulement ascendant, les conditions à la surface supérieure s'écrivent :

$$\frac{\partial T_f^+}{\partial z^+}(t^+, r^+, 1) = -\varepsilon \left(1 + \frac{(1-\varepsilon)\lambda_s^*}{\varepsilon\lambda_f^*} \right) Bi_0 T_f^+$$

$$\frac{\partial T_s^+}{\partial z^+}(t^+, r^+, 1) = -(1-\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon\lambda_f^*}{(1-\varepsilon)\lambda_s^*} \right) Bi_0 T_s^+.$$

Dans le cas d'un écoulement descendant, les conditions à la surface supérieure s'écrivent :

$$T_f^+(t^+, r^+, 1) = 0;$$

$$\frac{\partial T_s^+}{\partial z^+}(t^+, r^+, 1) = -\frac{Bi\lambda^*}{HS^2\lambda_s^*} T_s^+(t^+, r^+, 1).$$

Les conditions initiales et aux limites thermiques dans le cas du modèle à une température s'écrivent

$$T^+(0, r^+, z^+) = 0$$

$$T^+(t^+, r^+, 0) = 0$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial r^+}(t^+, 0, z^+) = 0$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial r^+}(t^+, A, z^+) = 1.$$

Dans le cas d'un écoulement ascendant, on a :

$$\frac{\partial T^+}{\partial z^+}(t^+, r^+, 1) = -Bi_0 T^+(t^+, r^+, 1).$$

Dans le cas d'un écoulement descendant, on a :

$$T^+(t^+, r^+, 1) = 0.$$

3. RESOLUTION NUMERIQUE

Les systèmes d'équations sont résolus numériquement par la méthode des domaines finis. Cette méthode consiste à définir à l'intérieur du domaine de calcul un ensemble de points (noeuds du maillage) et à construire autour de chaque noeud un domaine de contrôle (Fig. 2).

Les équations sont ensuite intégrées sur ces domaines. Puis les équations discrétisées résultantes sont

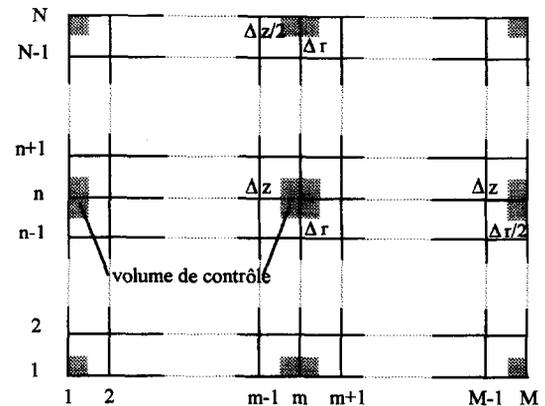


Fig. 2. Maillage.

obtenues en utilisant des hypothèses sur les variations des solutions entre les noeuds voisins.

Le maillage utilisé est uniforme: les pas de calcul Δr^+ et Δz^+ sont constants. Les dimensions du volume de contrôle varient selon qu'on est à l'intérieur du domaine, au voisinage des limites du domaine ou aux coins. A l'intérieur du domaine les volumes de contrôle sont de dimensions Δr^+ et Δz^+ . En $r^+ = 0$ et $r^+ = A$, les domaines de contrôle sont de dimensions $\Delta r^+/2$ et Δz^+ . En $z^+ = 1$ et $z^+ = 0$, les dimensions du domaine de contrôle sont: Δr^+ et $\Delta z^+/2$ et aux coins elles sont $\Delta r^+/2$ et $\Delta z^+/2$. Pour la discrétisations temporelle, on adopte un schéma implicite:

$$\int_t^{t+\Delta t} \Phi dt = \phi(t + \Delta t) \Delta t.$$

Ce schéma a l'avantage d'être inconditionnellement stable. Pour le traitement du terme de convection on utilise un schéma Upwind (décentree amont). Les flux sont supposés constants sur les faces des domaines de contrôle qui leurs sont perpendiculaires. Les dérivées premières sont approchées de la façon suivante:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{n+1/2} = \frac{\Phi_{n+1} - \Phi_n}{\Delta r}.$$

Les termes sources et les termes d'accumulations sont supposés constants dans le domaine de contrôle.

On obtient, ainsi, pour chaque noeud du maillage, une équation discrétisée de la forme:

$$a_0 \Phi_{n,m}^{i+1} = a_s \Phi_{n,m-1}^{i+1} + a_n \Phi_{n,m+1}^{i+1} + a_w \Phi_{n-1,m}^{i+1} + a_e \Phi_{n+1,m}^{i+1} + a.$$

Les coefficients a_0 , a_s , a_n , a_w , a_e , a dépendent des profils des solutions choisies, des pas de calcul et des propriétés physiques. La résolution du système d'équations algébriques obtenues est effectuée à l'aide de la méthode itérative de balayage ligne par ligne. Le choix de cette méthode itérative est justifié par sa rapidité de convergence par rapport à la méthode itérative point par point.

4. RESULTATS

4.1. Résultats obtenus à l'aide du modèle à une température

Nous avons représenté les variations spatio-temporelles de la température, de la pression et de la vitesse axiale, pour $Bi_0 = 2000$; pour $Pr = 0.123$; pour $Re = 8.7$ et pour différentes valeurs de Ra et de A .

4.1.1. *Description des phénomènes.* Les résultats obtenus mettent en évidence, selon les valeurs de A et de Ra , deux types d'écoulements: un écoulement avec recirculation et un écoulement sans recirculation.

Écoulement avec recirculation—Ce type d'écoulement est rencontré pour des facteurs de forme A élevés et pour de grands nombres de Rayleigh Ra . Le cas

$Ra = 2000$ et $A = 1$ a été choisi pour illustrer ce type d'écoulement (Figs. 3–5).

L'écoulement est semblable à celui rencontré dans le cas d'une plaque plane en milieu semi-infini où une couche limite se développe. La différence se situe au niveau de l'alimentation de l'écoulement pariétal. En effet cette alimentation s'effectue à la fois par le bas et par le haut du cylindre. Ceci s'explique par la résistance à l'écoulement qu'impose la présence du milieu poreux. L'alimentation en fluide de l'écoulement pariétal se fait par le 'chemin de moindre résistance' et donc depuis la face supérieure pour la partie haute du cylindre. Il apparaît ainsi une recirculation qui se traduit par des valeurs négatives de la vitesse comme la montre la Fig. 5. La pression diminue en s'éloignant de l'entrée, passe par un minimum puis croit pour tendre vers la pression ambiante. La dépression est plus importante près de la paroi chauffée.

La pression diminue en fonction du temps puis elle se stabilise au moment de l'établissement du régime stationnaire.

Comme en témoigne la Fig. 5, la vitesse de l'écoulement est importante au voisinage de la paroi chauffée et elle augmente d'une section l'autre. Au voisinage de la sortie du cylindre, l'écoulement est freiné par la présence de la pression atmosphérique et de ce fait, la vitesse décroît. Cette décroissance de la vitesse entraîne une augmentation de la pression.

Les isothermes présentent la même allure que dans le cas de la plaque plane en milieu semi-infini sauf au voisinage de la face supérieure où apparaissent de forts gradients verticaux dus aux pertes de chaleur au niveau de la face supérieure. La zone d'influence de ces pertes thermiques est cependant assez réduite.

Écoulement sans recirculation—Ce type d'écoulement est rencontré dans le cas de cylindres plus allongés et de nombres de Rayleigh assez petits. Le cas $Ra = 300$, $A = 0.1$ a été choisi pour illustrer ce type d'écoulement (Figs. 6–8).

L'écoulement est pratiquement vertical. La composante radiale de la vitesse est pratiquement nulle puisque les isobares sont proches de l'horizontale. L'écoulement reste plus important au voisinage de la paroi mais il occupe tout le cylindre.

La vitesse axiale est plus importante au voisinage de la paroi chauffée et elle augmente d'une section à l'autre (Fig. 8). La présence de la pression atmosphérique en haut du cylindre freine l'écoulement et la vitesse décroît dans cette zone. Cette décroissance de la vitesse est compensée par une augmentation de la pression.

Le tracé des isothermes (Fig. 7) montre que les gradients thermiques radiaux sont assez faibles. Les gradients thermiques verticaux sont assez importants au voisinage de la face supérieure.

4.2. Résultats obtenus à l'aide du modèle à deux températures

Nous avons simulé l'écoulement et le transfert de chaleur à l'aide du modèle à deux températures pour des valeurs de Ra , A , Bi_0 , Pr et Re identiques à celles

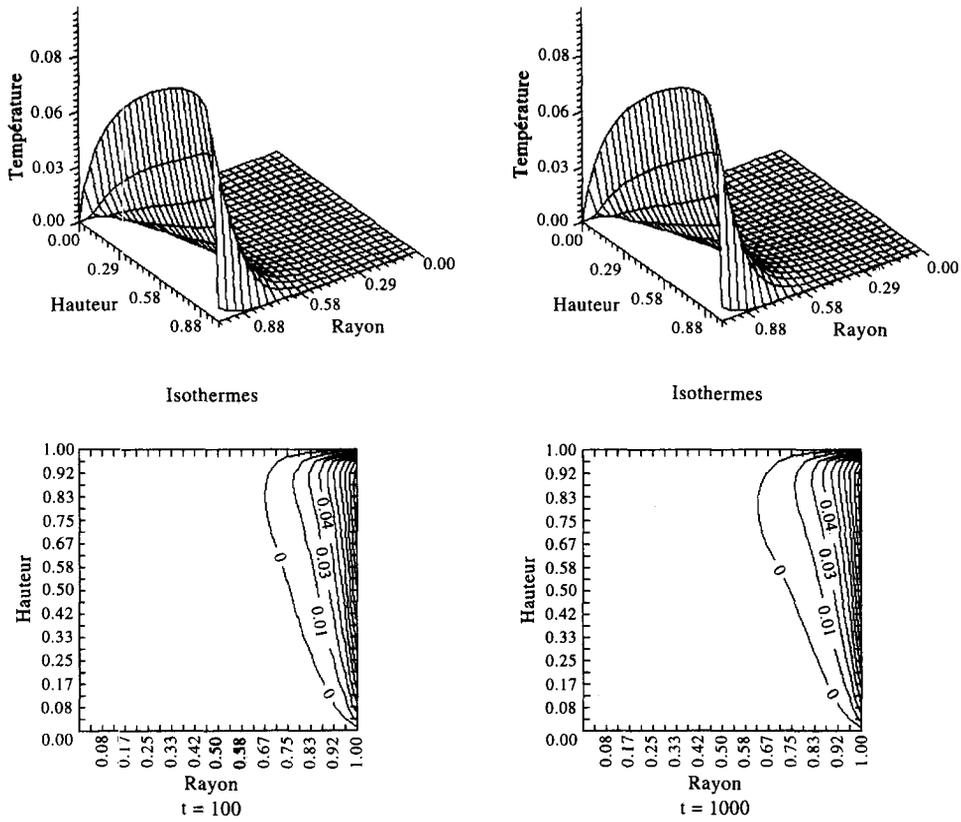


Fig. 3. Evolution de la température obtenue à l'aide du modèle à une température pour $Ra = 2000$ et $A = 1$.

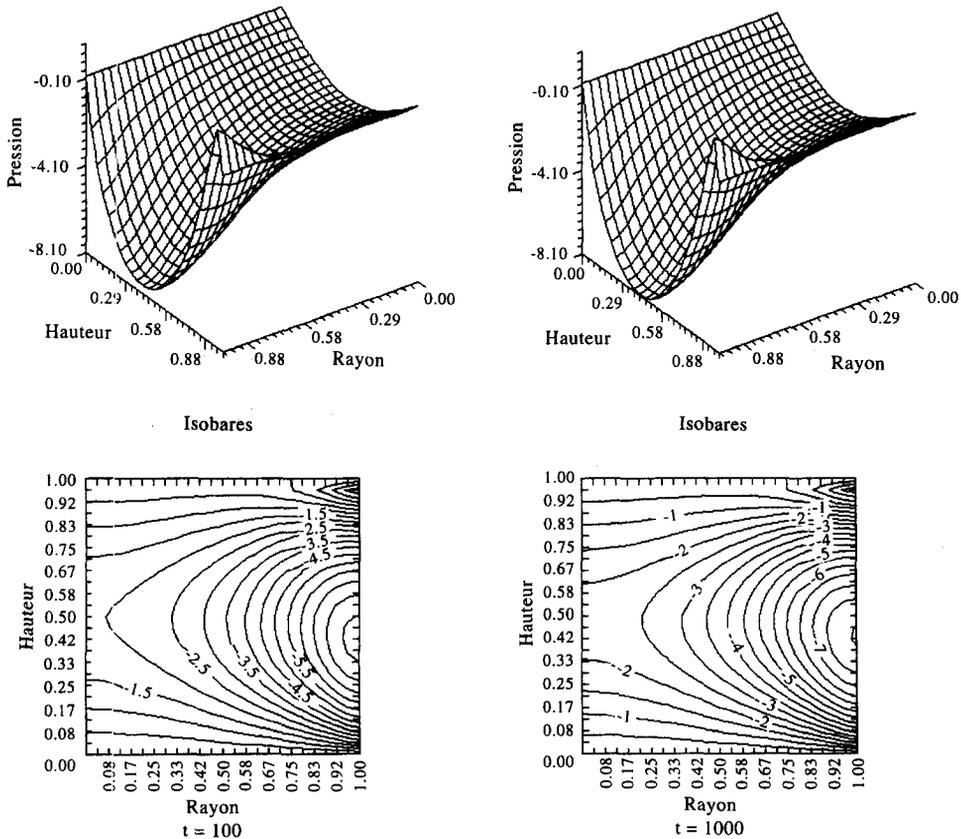


Fig. 4. Evolution de la pression obtenue à l'aide du modèle à une température pour $Ra = 2000$ et $A = 1$.

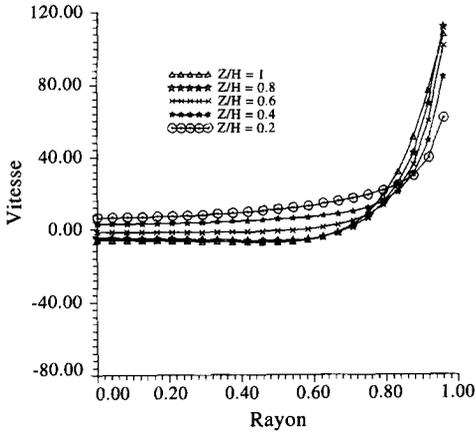


Fig. 5. Profils de la vitesse axiale à différentes hauteurs pour $Ra = 2000$ et $A = 1$.

prises lors de la simulation numérique à l'aide du modèle à une température.

4.2.1. *Description de l'écoulement.* Les résultats (Figs. 9–14) montrent que les effets de Ra et de A sur les évolutions spatio-temporelles des différentes variables d'état prédites par le modèle à deux températures sont similaires à celles prédites par le modèle à

une température. En effet les résultats obtenus à l'aide du modèle à deux températures montrent qu'une augmentation du nombre de Rayleigh entraîne une augmentation de la vitesse d'écoulement pariétal, un resserrement des isothermes et une élévation de la température maximale.

Pour Ra et A assez élevés, le modèle à deux températures rend compte de la présence d'une recirculation. Pour des valeurs de A et de Ra assez petites, l'écoulement est quasiment vertical et occupe la totalité du cylindre. Lorsque A augmente le confinement de l'écoulement devient moins important et on tend vers un écoulement engendré par une plaque plane verticale chauffée par un flux de chaleur constant et se trouvant dans un milieu poreux.

4.2.2. *Comparaison des valeurs locales des températures du solide et du fluide.* Afin de vérifier la validité de l'hypothèse d'équilibre thermique local, nous avons comparé en différents points du milieu les températures du solide et du fluide pour différentes valeurs des paramètres. Ce type de comparaison nécessite un nombre considérable de figures. Pour cela nous nous contentons uniquement de présenter quelques résultats typiques.

Les résultats (Fig. 15) montrent qu'il y a une diffé-

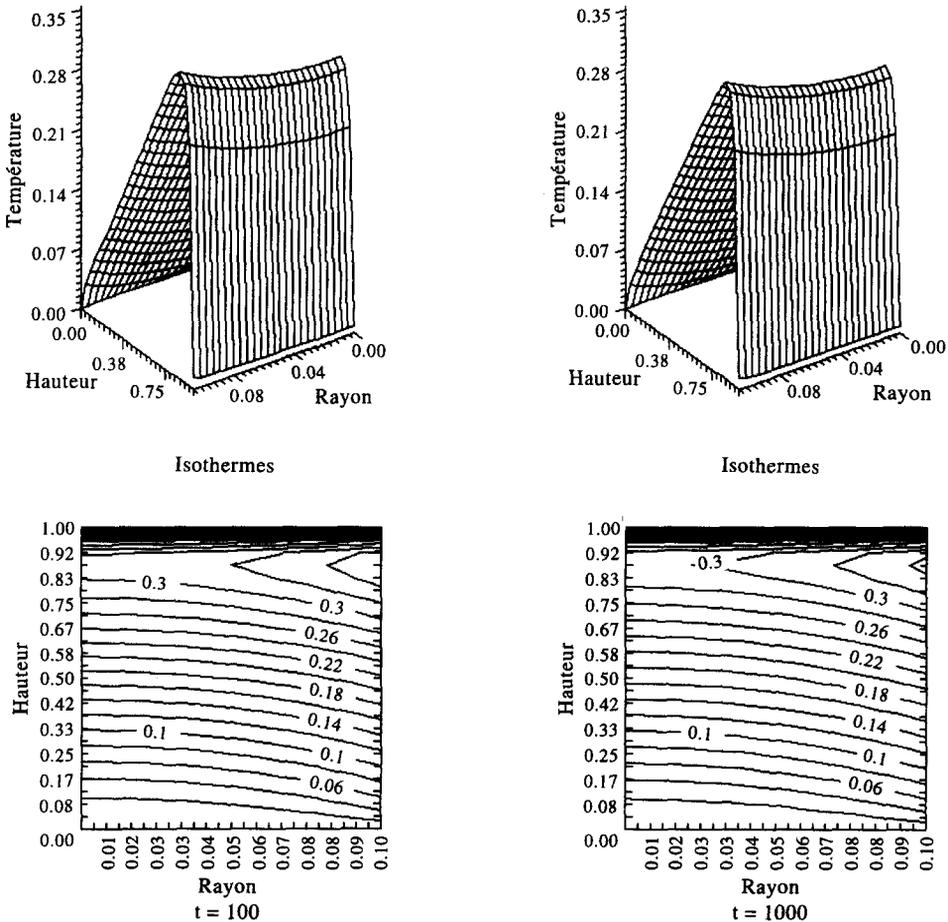


Fig. 6. Evolution de la température obtenue à l'aide du modèle à une température pour $Ra = 300$ et $A = 0.1$.

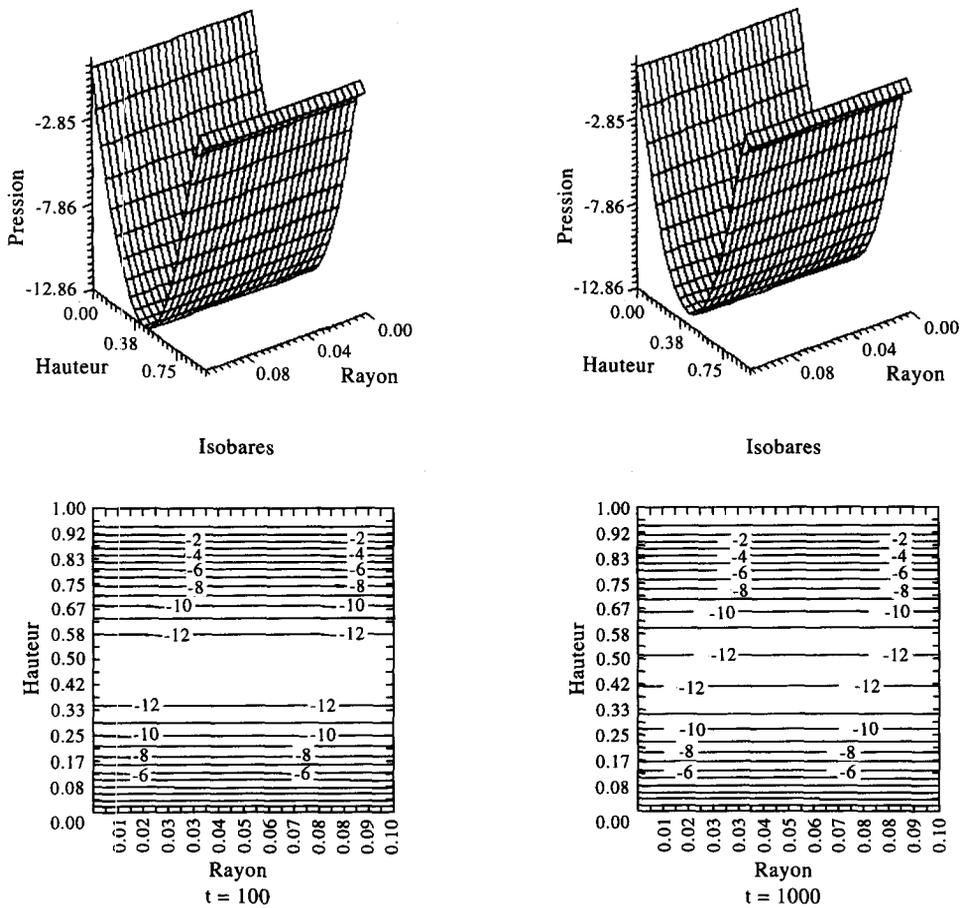


Fig. 7. Evolution de la pression obtenue à l'aide du modèle à une température pour $Ra = 300$ et $A = 0,1$.

rence entre T_s et T_f uniquement à l'entrée du milieu, très près de la paroi chauffée et très près de la surface supérieure du milieu. La différence à l'entrée est due au fait que le fluide entre à une température inférieure à celle du slide, l'écart entre T_s et T_f près de la paroi chauffée et de la surface supérieure du milieu est due à la différence entre les caractéristiques thermiques des deux phases.

Il ressort donc de cette comparaison que l'hypothèse de l'équilibre thermique local est vérifiée dans la quasi-totalité du milieu.

4.2.3. *Comparaison des résultats obtenus à l'aide des deux modèles.* Nous avons comparé, pour un même problème physique, les valeurs obtenues par les deux modèles du débit volumique D et du flux de chaleur convecté Q quittant la surface supérieure du milieu. Sous forme intégrale, le débit volumique D et le flux d'énergie convecté Q s'écrivent :

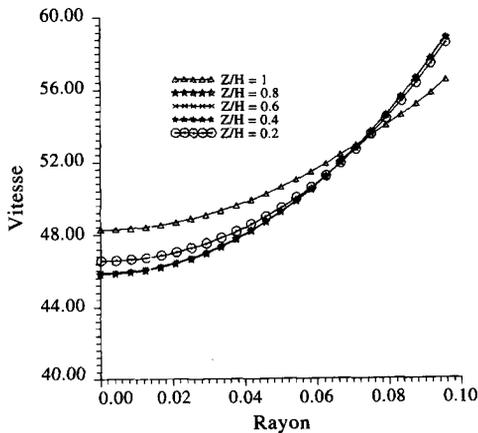


Fig. 8. Profils de la vitesse axiale à différentes hauteurs pour $Ra = 300$ et $A = 0,1$.

$$D = \int_{S_H^+} U^+ ds^+$$

$$Q = \int_{S_H^+} U^+ T^+ ds^+$$

où S_H^+ est la section en $z = H$.

Nous avons considéré ces deux grandeurs parce que, d'une part elles présentent un intérêt pratique, d'autre part leurs représentation permet d'apprécier plus facilement l'effet des différents paramètres sur le domaine de validité du modèle à une température.

Pour un même problème physique, les nombres sans dimensions : Ra , A , Bi_0 , Pr et Re doivent être identiques dans les deux modèles.

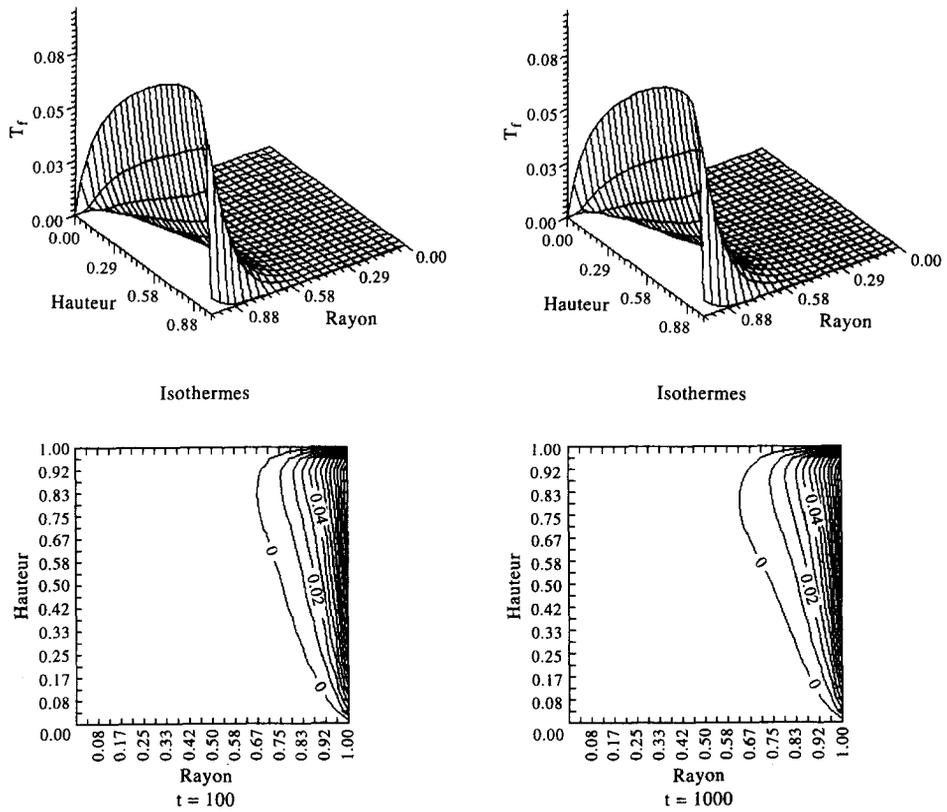


Fig. 9. Evolution de la température du fluide obtenue à l'aide du modèle à deux températures pour $Ra = 2000$, $A = 1$, $Bi = 100$, $\lambda_f/\lambda_s^* = 0,01$; $\rho c_{p_s}/\rho c_{p_f} = 0.22$.

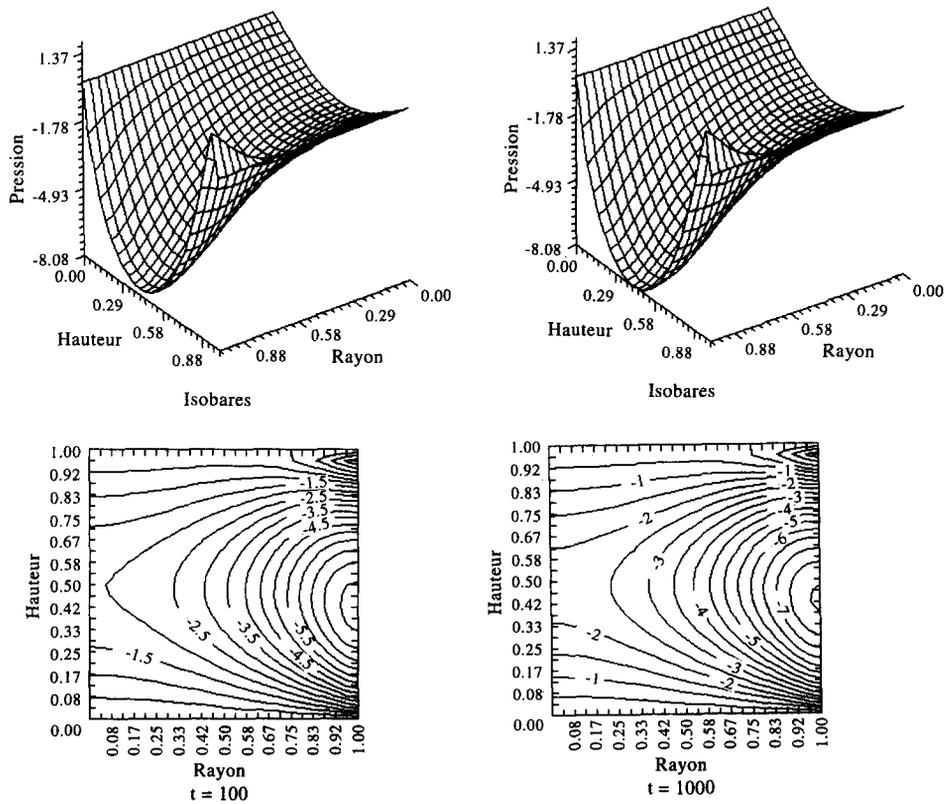


Fig. 10. Evolution de la pression obtenue à l'aide du modèle à deux températures pour $Ra = 2000$; $A = 1$; $Bi = 100$; $\lambda_f/\lambda_s^* = 0,01$; $\rho c_{p_s}/\rho c_{p_f} = 0.22$.

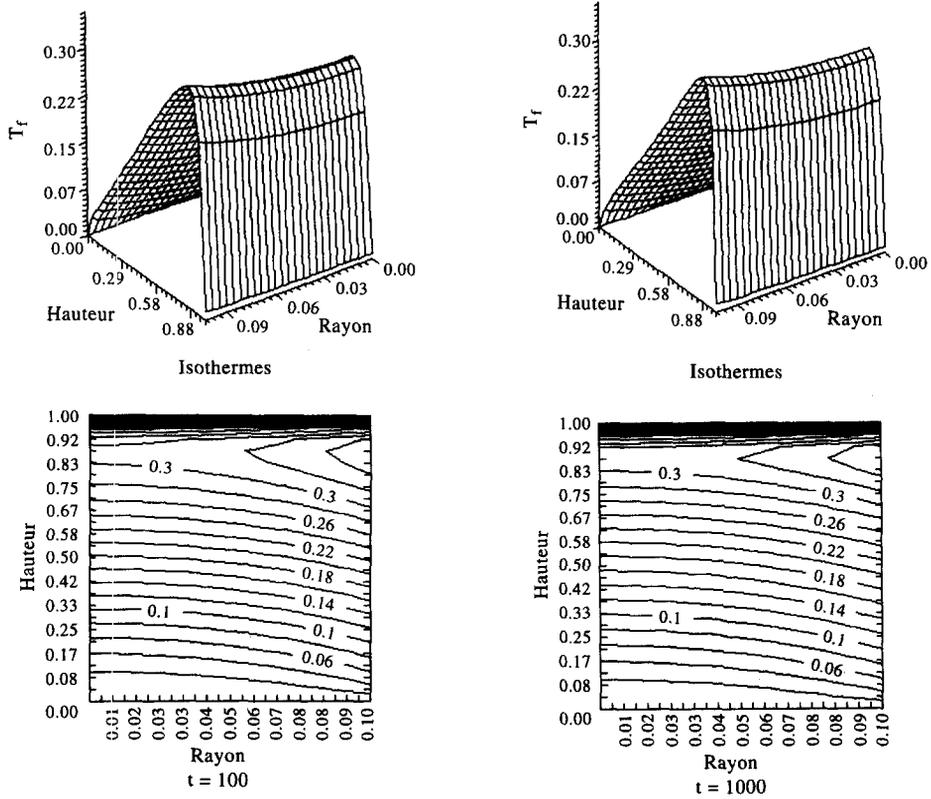


Fig. 11. Evolution de la température du fluide obtenue à l'aide du modèle à deux températures pour $Ra = 300$; $A = 0.1$; $Bi = 100$; $\lambda_f^*/\lambda_s^* = 0.01$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0.22$.

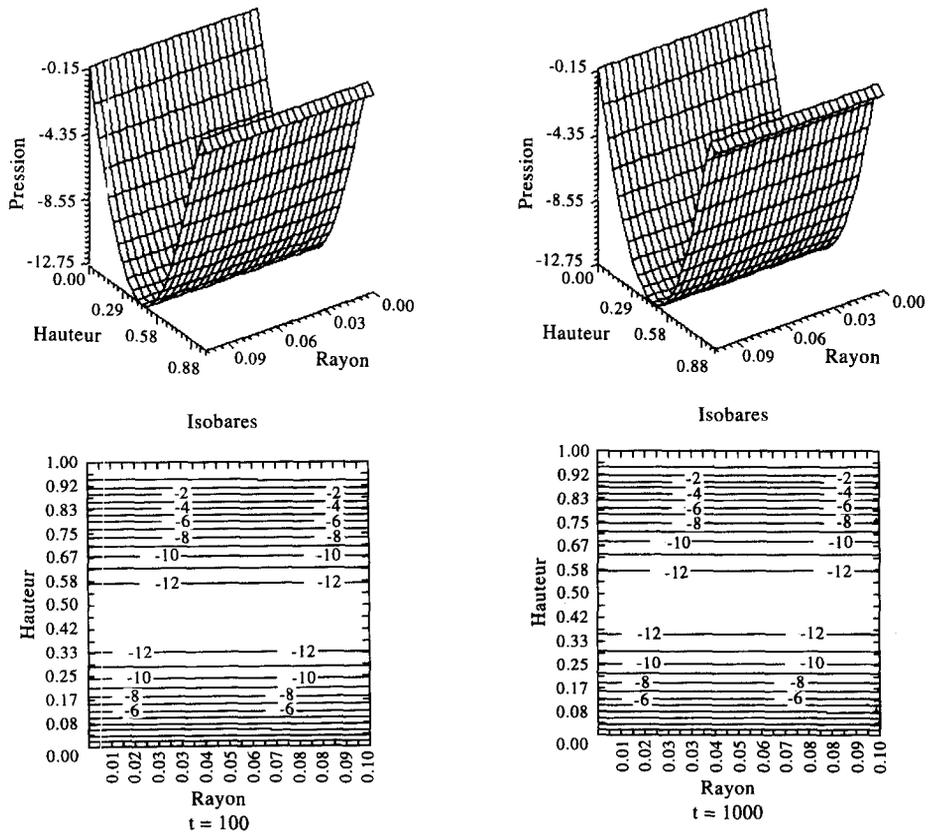


Fig. 12. Evolution de la pression obtenue à l'aide du modèle à deux températures pour $Ra = 300$; $A = 0.1$; $Bi = 100$; $\lambda_f^*/\lambda_s^* = 0.01$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0.22$.

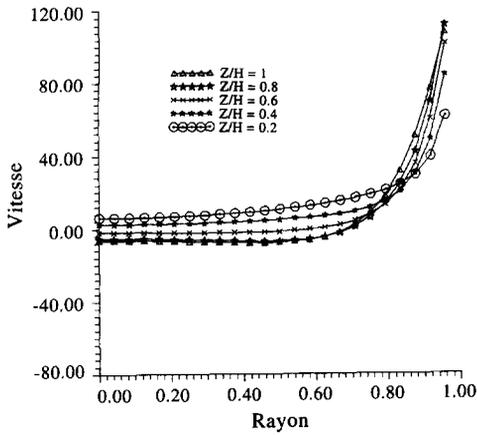


Fig. 13. Profils de la vitesse axiale à différentes hauteurs obtenus à l'aide du modèle à deux températures pour $Ra = 2000$; $A = 1$; $Bi = 100$; $\lambda_f/\lambda_s^* = 0,01$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0,22$

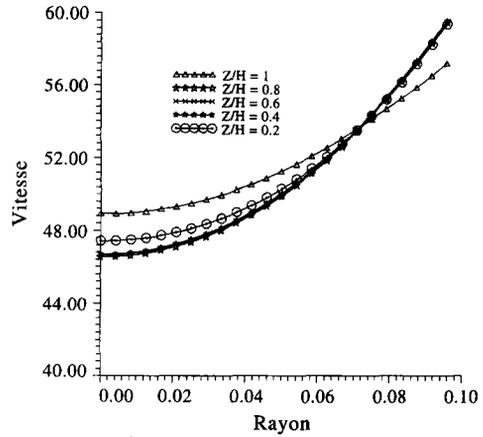


Fig. 14. Profils de la vitesse axiale à différentes hauteurs obtenus à l'aide du modèle à deux températures pour : $Ra = 300$; $A = 0,1$; $Bi = 100$; $\lambda_f/\lambda_s^* = 0,01$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0,22$.

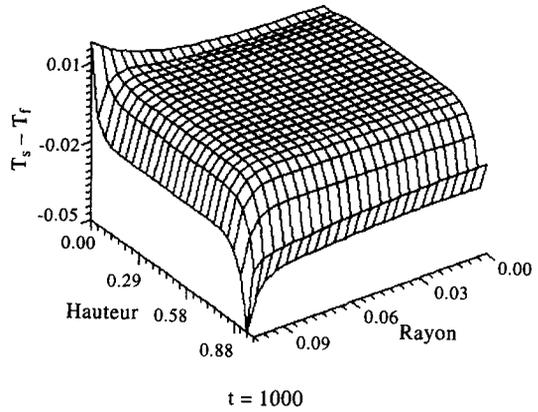
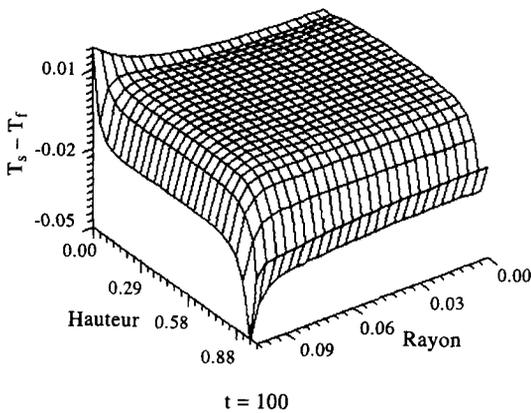


Fig. 15. Comparaison des valeurs locales des températures du solide et du fluide. $Ra = 300$; $A = 0,1$; $Bi = 1$; $\lambda_f/\lambda_s^* = 0,01$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0,22$.

Les comparaisons des valeurs de D et Q obtenues à l'aide des deux modèles montrent que : lorsque Bi décroît les écarts entre les deux modèles augmentent (Figs. 16 et 17) ; lorsque le rapport des conductivités λ_f/λ_s^* s'approche de 1, les écarts entre les deux modèles diminuent (Figs. 18 et 19).

5. CONCLUSION

La présente étude a permis de mettre au point des outils d'étude théoriques (modèles et logiciels) de l'écoulement et du transfert de chaleur par convection naturelle en milieux poreux. Ces outils sont utilisés pour simuler numériquement l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle dans un cylindre vertical rempli de grains ouvert à ses extrémités et dont la surface latérale est chauffée par une densité de flux de chaleur constante.

Les résultats de la simulation numérique ont mis en évidence l'existence de deux classes d'écoulement selon les valeurs des nombres de Rayleigh Ra et du facteur de forme A :

(1) Pour des nombres de Rayleigh et des facteurs de forme élevés, l'écoulement et l'échauffement sont localisés principalement au voisinage de la paroi

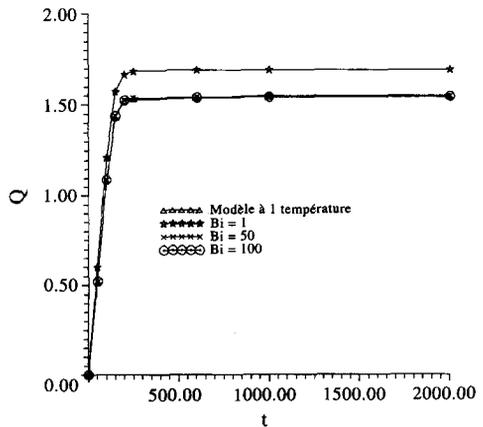


Fig. 16. Effet de Bi sur l'écart entre les valeurs obtenues à l'aide des deux modèles du débit D . $Ra = 300$; $A = 1$; $\lambda_f/\lambda_s^* = 0,01$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0,22$.

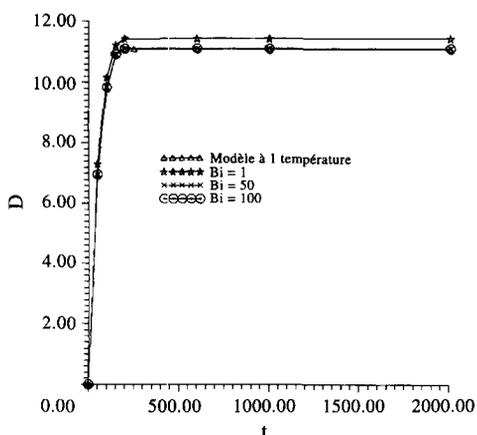


Fig. 17. Effet de Bi sur l'écart entre les valeurs obtenues à l'aide des deux modèles du flux de chaleur convecté Q . $Ra = 300$; $A = 1$; $\lambda_f/\lambda_s^* = 0.01$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0.22$.

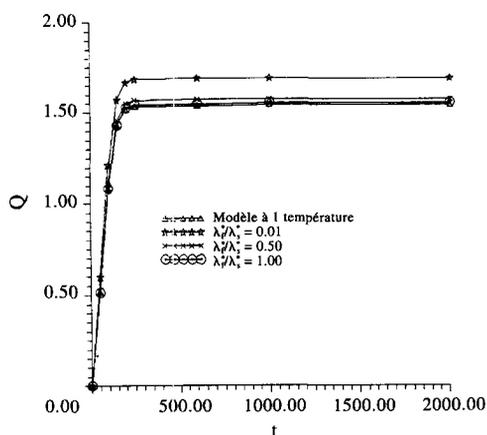


Fig. 18. Effet de λ_f/λ_s^* sur l'écart entre les valeurs obtenues à l'aide des deux modèles du débit D . $Ra = 300$; $A = 1$; $Bi = 1$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0.22$.

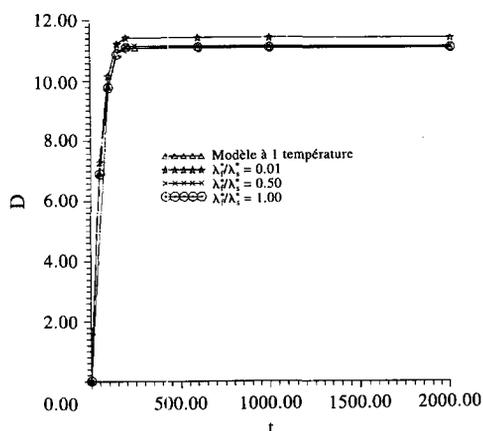


Fig. 19. Effet de $\lambda_f/\lambda_s^* = 0,01$, sur l'écart entre les valeurs obtenues à l'aide des deux modèles du flux de chaleur convecté Q . $Ra = 300$; $A = 1$; $Bi = 1$; $\rho c_{p_f}/\rho c_{p_s} = 0.22$.

chauffée et les résultats sont proches de ceux obtenus par une analyse de type couche limite. L'alimentation de l'écoulement pariétal s'effectue à la fois par le bas et par le haut du cylindre ou l'on voit apparaître un écoulement de recirculation descendant dans la zone centrale.

(2) Pour des Ra et A assez petits, l'écoulement est ascendant dans la totalité du cylindre et la composante radiale de la vitesse pariétale est pratiquement nulle dans tout le domaine.

L'étude effectuée montre aussi que :

(1) Dans les conditions considérées, l'hypothèse de l'équilibre thermique local est valable dans la quasi-totalité du domaine. En effet, il existe un écart entre les températures du solide et du fluide uniquement à l'entrée du cylindre et au voisinage immédiat de la paroi chauffée ainsi qu'à la surface supérieure du cylindre.

(2) Les écarts entre les valeurs obtenues par le modèle à une température et le modèle à deux températures du débit volumique et du flux de chaleur convecté quittant la surface supérieure du cylindre sont d'autant plus petits que le nombre de Biot est grand et que les conductivités thermiques effectives des deux phases solide et fluide sont proches.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. A. Nield, The stability of convective flow in porous media, in *Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media*, Serie E., Applied Sciences, Vol. 196. Kluwer Academic, Dordrecht (1991).
2. P. Cheng, Heat transfer in geothermal systems, *Adv. Heat Transfer* **14**, 1-105 (1978).
3. M. Combarnous et S. Bories, Hydrothermal convection in saturated porous media, *Adv. Hydrosci.* **10**, 231-307 (1975).
4. S. Bories, Natural convection in porous media, in *Advances in Transport in Porous Media* (Edited by J. Bear and M. Y. Corapcioglu). Martinus Nijhoff, Dordrecht (1987).
5. A. Bejan, Natural convection in an infinite porous medium with a concentrated heat source, *J. Fluid Mech.* **89**, 97-107 (1979).
6. C. E. Hickox, Thermal convection at low Rayleigh number from concentrated source in porous media, *J. Heat Transfer* **103**, 232-236 (1981).
7. W. J. Minkowicz et P. Cheng, Free convection about a vertical cylinder embedded in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 205-813 (1976).
8. S. Larsons and D. Poulikakos, Double diffusion from a horizontal line source in an infinite porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 492-495 (1986).
9. D. Poulikakos, On buoyancy induced heat and mass transfer from a concentrated source in an infinite porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 621-629 (1985).
10. P. Cheng et W. J. Minkowicz, Free convection about a vertical plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dyke, *J. Geophys. Res.* **82**, 2040-2044 (1977).
11. Y. Josh et B. Gebhart, Vertical natural convection flows in porous media : calculations of improved accuracy, *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, 69-75 (1984).
12. A. Bejan et D. Poulikakos, The non-Darcy regime for vertical boundary layer natural convection in porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, 717-722 (1984).
13. A. Bejan et K. R. Khair, Heat and mass transfer by

- natural convection in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 909–918 (1985).
14. A. Bejan, The boundary layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 1339–1345 (1983).
 15. J. E. Weber, The boundary layer regime for convection in vertical porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 569–573 (1975).
 16. T. Masuouka, Y. Yokote et T. Katsuhara, Heat transfer by natural convection in vertical porous layer, *Bull. JSME* **24**, 995–1001 (1981).
 17. K. J. Beukema et S. Bruin, Three dimensional natural convection in a confined porous medium with internal heat generation, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 451–458 (1983).
 18. H. Ineba et N Seki, A numerical study on transient heat transfer in a vertical porous layer, *Bull. JSME* **25**, 934–938 (1982).
 19. G. Lauriat et V. Prasad, *Natural Convection in a Vertical Porous Cavity: a Numerical Study for Brinkman-extended Darcy Formulation in Natural Convection in Porous Media*, Vol. 109, pp. 295. ASME, New York (1987).
 20. W. J. Chang et C. H. Hsiao, Natural convection in a vertical cylinder filled with anisotropic porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 3361 (1993).
 21. M. Combarous et S. Bories, Modélisation de la convection naturelle au sein d'une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 505–515 (1974).
 22. A. Bejan, Natural convection in vertical cylinder well filled with porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 726–729 (1984).
 23. B. D. Young, D. F. Williams and A. W. Bryson, Two dimensional natural convection and conduction in packed bed containing a hot spot and its relevance to the transport of air in a coal dump, *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 331–336 (1986).
 24. T. Nishimura, T. Takumi, M. Shiraishi, Y. Kawamura and H. Ozoe, Numerical analysis on natural convection in rectangular enclosure horizontally divided into fluid and porous region, *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 889–898 (1986).

TRANSIENT FREE CONVECTION IN A VERTICAL CYLINDER FILLED WITH GRANULAR PRODUCT, OPEN AT THE EXTREMITIES AND HEATED WITH UNIFORM HEAT FLUX DENSITY—VALIDITY OF THE LOCAL THERMAL EQUILIBRIUM HYPOTHESIS

Abstract—In this paper, we present a theoretical study of flow and heat transfer by transient free convection in a vertical cylinder filled with granular product. The cylinder is opened at the extremities and heated with uniform heat flux density. Two models are used: two-temperatures model and one-temperature model. The mathematical models are solved numerically by the method of finite domains. The numerical simulation has allowed us to determine the time–space evolution of temperatures and pressure. In order to test the validity of the one-temperature model and thus the validity of the local equilibrium hypothesis we have made two types of comparisons: comparison between local values of solid temperature and fluid temperature obtained by the two temperatures model; and comparison between the values obtained by the two models of outlet convected heat flux and outlet flow rate of fluid. Copyright © 1996 Elsevier Science Ltd.